

Elektrodynamische Potentiale

by Thomas Zwick

INSTITUT FÜR HOCHFREQUENZTECHNIK UND ELEKTRONIK



Maxwell 'sche Gleichungen

- Aufgestellt von James Clerk Maxwell 1864
- Experimentell nachgeprüft von Heinrich Hertz 1888
- Beschreiben elektromagnetisches Verhalten im makroskopischen Bereich

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

$$\text{div } \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Nabla-Operator:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$\vec{H}$: magnetische Feldstärke

$\vec{B}$: magnetische Verschiebungsdichte

$\vec{E}$: elektrische Feldstärke

$\vec{D}$: elektrische Verschiebungsdichte

$\vec{J}$: elektrische Stromdichte

ρ : elektrische Ladungsdichte

Maxwell 'sche Gleichungen für Antennen

Feldraum homogen und isotrop:

$$\text{grad } \varepsilon = \vec{\nabla} \varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\text{grad } \mu = \vec{\nabla} \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

rein harmonische
Vorgänge:

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

Formelsammlung:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Vektor-Potential (1)

1. Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu(\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -j\omega\mu(j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J}) = k^2\vec{E} - j\omega\mu\vec{J}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad \text{STOP, da } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$$

4. Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} := \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \boxed{1}$$

1. Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega(\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + j\omega\vec{A}) = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{\nabla} \varphi := \vec{E} + j\omega\vec{A} \quad \boxed{2}$$

2. Maxwell, 1, 2

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = j\omega\mu\epsilon\vec{E} + \mu\vec{J} =$$

$$j\omega\mu\epsilon(-j\omega\vec{A} - \vec{\nabla} \varphi) + \mu\vec{J} = \underline{k^2\vec{A} - j\omega\mu\epsilon\vec{\nabla} \varphi + \mu\vec{J}}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu\vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + j\omega\mu\epsilon\varphi)$$

$$k^2 = \omega^2 \mu\epsilon = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Vektor-Potential (2)

$$\text{Lorenz-Eichung: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\epsilon\varphi \quad \boxed{3}$$

$$\text{Vektorielle inhomogene Wellengleichung: } \vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

$$2,3: \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + j\omega \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + k^2 \varphi = -\vec{\nabla}^2 \varphi$$

$$+3. \text{ Maxwell: } \vec{\nabla}^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{Skalare inhomogene Wellengleichung}$$

$$+2. \text{ Maxwell: } 0 = \nabla \left(\nabla \times \vec{H} \right) = j\omega \nabla \vec{D} + \nabla \vec{J}$$

+3. Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -j\omega \rho$$

$$2,3: \quad \vec{E} = -j\omega \vec{A} + \frac{\vec{\nabla}^2 \vec{A}}{j\omega\mu\epsilon}$$

Merkhilfe:

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\Delta \varphi = \text{div}(\text{grad } \varphi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{\nabla}^2 \varphi$$

Vektor-Potential und Skalar-Potential

Vektor-Potential $\vec{A}$: $\vec{B} := \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Skalar-Potential φ : $\vec{E} + j\omega\vec{A} := -\vec{\nabla}\varphi$

Lorenz-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\varepsilon\varphi$

Vektorielle inhomogene Wellengleichung: $\vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu\vec{J}$

Skalare inhomogene Wellengleichung: $\vec{\nabla}^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

Kontinuitätsgleichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -j\omega\rho$